Trigonometrische Reihen

Definition: eine Reihe der Gestalt

$$\frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + \cdots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \cdots$$

heißt ***trigonometrische Reihe***.
Die Zahlen $a_0, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n, \ldots$ sind ihre ***Koeffizienten.***

gegeben: eine periodische Funktion

gesucht: eine Darstellung dieser Funktion als trigonometrische Reihe

Eigenschaften trigonometrischer Reihen

$$\frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + \cdots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \cdots$$

- wenn eine trigonometrische Reihe an der Stelle t konvergiert, dann auch an der Stelle $t + 2\pi$ (und für ganze k auch $t + 2k\pi$)
- wenn eine trigonometrische Reihe überall konvergiert, dann ist sie eine periodische Funktion mit der Periode 2π
- wenn alle $a_i = 0$ sind, dann ist die durch die Reihe definierte Funktion ungerade, wenn alle $b_i = 0$ sind dann ist sie gerade.

Reihenentwicklung

Sei nun $f(x)$ mit Periode 2π gegeben.
Frage: Wie läßt sich $f(x)$ als trigonometrische Reihe darstellen? Wie kann man also die Koeffizienten bestimmen?

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \cdots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \cdots$$

Wenn die Reihe gleichmäßig konvergiert, dann ist $f(x)$ auf $[0,2\pi]$ integrierbar. Wir wissen, daß für $m \neq n$ gilt:

$$\int_0^{2\pi} \cos nx \sin mx \; dx = 0 \qquad \int_0^{2\pi} \cos nx \cos mx \; dx = 0$$

Was passiert, wenn wir beide Gleichungsseiten mit $\cos mx$ multiplizieren und dann integrieren?

Reihenentwicklung

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos mx \, dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \Bigg(\underbrace{\frac{1}{2}a_0 \cos mx}_{\text{immer } 0} + \sum_{n=1}^{\infty} (\underbrace{a_n \cos nx \cos mx}_{} + \underbrace{b_n \sin nx \cos mx}_{\text{immer } 0}) \Bigg) dx$$

$$\int_0^{2\pi} \cos nx \cos mx \; dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ \pi & (m = n \neq 0) \\ 2\pi & (m = n = 0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos nx \, dx = \pi \cdot a_n$$

Fourierreihenentwicklung

wir erhalten also

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos nx \, dx$$

beide Seiten mit $\sin mx$ multiplizieren und dann integrieren liefert:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin nx \, dx$$

Ist $f(x)$ auf $[0,2\pi]$ integrierbar, kann man so die Koeffizienten $a_0, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n, \ldots$ berechnen. Sie heißen ***Fourierkoeffizienten*** der Funktion f im Intervall $[0,2\pi]$.
Die zugehörige trigonometrische Reihe heißt ***Fourierreihe*** der Funktion f.

Fourierreihenentwicklung

Bemerkung: Ist f zusätzlich periodisch mit Periode 2π, kann man die Koeffizienten über jedem Intervall der Länge 2π berechnen:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_t^{t+2\pi} f(x) \cdot \cos nx \, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_t^{t+2\pi} f(x) \cdot \sin nx \, dx$$

Ist f nicht periodisch, interessiert man sich meist nur für einen Abschnitt und berechnet die Fourierkoeffizienten nur für diesen.

Fourierreihenentwicklung

Bemerkung:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\cdot\cos nx\,dx \;=0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\cdot\sin nx\,dx \;=0$$

deshalb gilt auch (für *f* auf [*a*,*b*] integrierbar):

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

D.h. *f*(*x*) wird immer genauer angenähert durch die partielle Summe $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{N}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

Fourierreihenentwicklung

Wenn *f* eine Periode $T \neq 2\pi$ hat, erhält man

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos(\frac{2\pi}{T}nx) + b_n \sin(\frac{2\pi}{T}nx)\right)$$

und

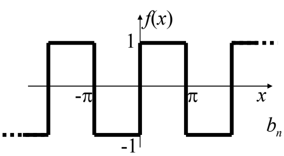
$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cdot\cos(\frac{2\pi}{T}nx)\,dx$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cdot\sin(\frac{2\pi}{T}nx)\,dx$$

Fourierreihe für Rechteckfunktion

Beispiel für Fourierreihenentwicklung:

sei $f(x)$=sign(x) auf [-π,+π], und 2π-periodisch sonst



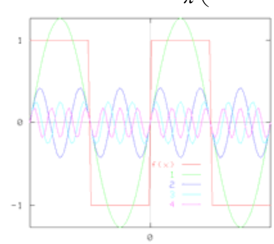
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cdot\cos nx\,dx \;=0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cdot\sin nx\,dx \;= \frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n)$$

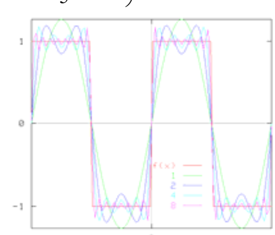
also Fourierreihe von $f(x) \;=\; \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots\right)$

Fourierreihe für Rechteckfunktion

$$f(x) \;=\; \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots\right)$$



die ersten vier Glieder der Fourierreihe von $f(x)$=„Rechteck"

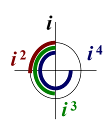


Summen der ersten 1,2,4 oder 8 Glieder

Taylorreihenentwicklung

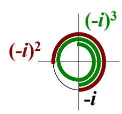
$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \ldots$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$



$$e^{ix} = 1 + (i)\frac{x}{1!} + (-1)\frac{x^2}{2!} + (-i)\frac{x^3}{3!} + (1)\frac{x^4}{4!} + \ldots$$

$$e^{-ix} = 1 + (-i)\frac{x}{1!} + (-1)\frac{x^2}{2!} + (i)\frac{x^3}{3!} + (1)\frac{x^4}{4!} + \ldots$$



Fourierreihenentwicklung

$$e^{ix} = 1 + (i)\frac{x}{1!} + (-1)\frac{x^2}{2!} + (-i)\frac{x^3}{3!} + (1)\frac{x^4}{4!} + \ldots \qquad e^{-ix} = 1 + (-i)\frac{x}{1!} + (-1)\frac{x^2}{2!} + (i)\frac{x^3}{3!} + (1)\frac{x^4}{4!} + \ldots$$

$$e^{ix} + e^{-ix} = 2 + 0 - 2\frac{x^2}{2!} + 0 + 2\frac{x^4}{4!} + \ldots = 2\cos x$$

$$e^{ix} - e^{-ix} = 0 + 2i\frac{x}{1!} + 0 - 2i\frac{x^3}{3!} + \ldots = 2i\sin x$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Fouriertransformation

Betrachten wir beliebige (nicht unbedingt periodische) Funktionen, dann erhalten wir für Periode $\to \infty$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} \mathrm{d}\omega$$

mit

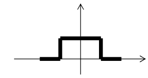
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} \mathrm{d}t$$

Wir nennen F die **Fouriertransformierte** von f (oder auch Spektrum von f)

Ist f die Summe mehrerer Schwingungen, dann gibt $F(\omega)$ an, mit welchem Anteil die Frequenz ω in die Summe eingeht.

Fouriertransformation: Beispiel

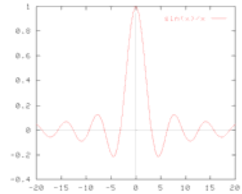
sei $f(t) = \begin{cases} 1, & |t| \le 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$



Die Fouriertransformierte von f ist

$$F(\omega) = \int_{-1}^{1} e^{-i\omega t} \mathrm{d}t$$

$$= \begin{cases} 2\dfrac{\sin\omega}{\omega} & \text{für } \omega \ne 0 \\ 2 & \text{für } \omega = 0 \end{cases}$$



Fouriertransformation

Ein paar Eigenschaften von Fouriertransformierten: (sei $\mathbf{F}(f)$ die Fouriertransformierte $F(\omega)$ von $f(t)$)

Linearität: $\mathbf{F}(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 \mathbf{F}(f_1) + c_2 \mathbf{F}(f_2)$

Differentiation: $\mathbf{F}(f^{(n)}) = (i\omega)^n \mathbf{F}(f)$

Verschiebung: Zeit $\mathbf{F}(f(t-T)) = e^{-i\omega T} \mathbf{F}(f)$ Frequenz $\mathbf{F}(e^{-i\omega_0 t} f(t)) = F(\omega - \omega_0)$

Faltung: $(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau) g(\tau) \mathrm{d}\tau$

$\mathbf{F}(f * g) = \mathbf{F}(f) \cdot \mathbf{F}(g)$

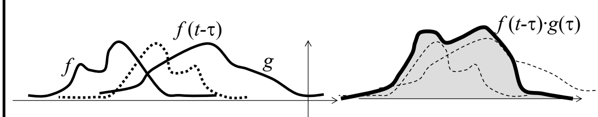
Faltung im Zeitbereich = Mult. im Frequenzbereich

Faltung

Definition: $(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau) g(\tau) \mathrm{d}\tau$ (kontinuierlich)

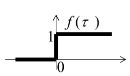
$(f * g)[i] = \sum_{j=-\infty}^{\infty} f[i-j] g[j]$ (diskret)

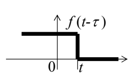
Faltung zweier Funktionen entspricht dem Filtern eines Signals.



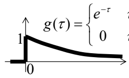
Ein Beispiel für eine Faltung

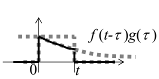
$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau) g(\tau) \mathrm{d}\tau$$

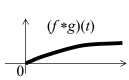




$g(\tau) = \begin{cases} e^{-\tau} & \tau \le 0 \\ 0 & \tau < 0 \end{cases}$



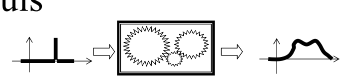




$$(f * g)(t) = \int_0^t e^{-\tau} \mathrm{d}\tau = -e^{-\tau}\Big|_0^t = 1 - e^{-t}$$

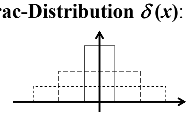
Der Impuls

Oft Systembeschreibung durch „Impulsantwort“:

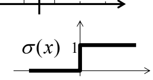


Impuls $\ne$ Funktion, sondern **Dirac-Distribution $\delta(x)$**:

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \begin{cases} 0 & \textit{für } |x| > \varepsilon \\ \dfrac{1}{2\varepsilon} & \textit{für } |x| \le \varepsilon \end{cases}$$

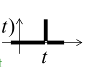


Interpretation: $\delta(x)$ ist Ableitung von $\sigma(x)$



Eigenschaften: $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \mathrm{d}x = 1$ $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) \mathrm{d}x = f(0)$

$\delta_t(x) = \delta(x-t)$

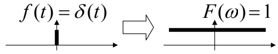


$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{i\omega t} \mathrm{d}t = [\sigma(t)]_{-\infty}^{\infty} = 1 - 0 = 1$$

Fouriertransformierte des Impulses $\delta(t)$

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{i\omega t}\mathrm{d}t \;=\; e^{i\omega\cdot 0}=1$$

$f(t)=\delta(t)$ $\Rightarrow$ $F(\omega)=1$

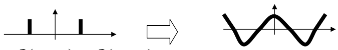


F ist hier rein reell, keine Imaginäranteile

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-\tau)e^{i\omega t}\mathrm{d}t \;=e^{i\omega\tau}$$

F ist hier komplex, reelle und imaginäre Anteile (kein Bild) aber $|F|=1$

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}(\delta(t-\tau)e^{i\omega t}+\delta(t+\tau)e^{i\omega t})\mathrm{d}t \;=\; e^{i\omega\cdot\tau}+e^{i\omega\cdot-\tau}=2\cos(\omega\tau)$$

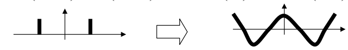


$F(\omega)=2\cos(\omega\tau)$ (rein reell)

$f(t)=\delta(t-\tau)+\delta(t+\tau)$

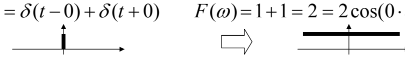
Fouriertransformierte von 2 Impulsen

Allgemein gilt: $f(t)=\delta(t-\tau)+\delta(t+\tau)$ $\Rightarrow$ $F(\omega)=2\cos(\omega\tau)$



Beispielfälle:

$\tau=0$: $f(t)=\delta(t-0)+\delta(t+0)$ $\Rightarrow$ $F(\omega)=1+1=2=2\cos(0\cdot\omega)$

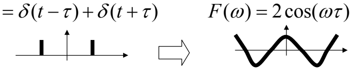


$\tau=1$: $f(t)=\delta(t-1)+\delta(t+1)$ $\Rightarrow$ $F(\omega)=2\cos(1\cdot\omega)$

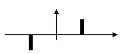
$\tau=2$: $f(t)=\delta(t-2)+\delta(t+2)$ $\Rightarrow$ $F(\omega)=2\cos(2\cdot\omega)$

Fouriertransformierte von 2 Impulsen

Bereits gesehen: $f(t)=\delta(t-\tau)+\delta(t+\tau)$ $\Rightarrow$ $F(\omega)=2\cos(\omega\tau)$

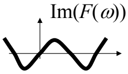


Was ist mit: $f(t)=\delta(t-\tau)-\delta(t+\tau)$



$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}(\delta(t-\tau)e^{i\omega t}-\delta(t+\tau)e^{i\omega t})\mathrm{d}t \;=\; e^{i\omega\cdot\tau}-e^{i\omega\cdot-\tau}=2i\sin(\omega\tau)$$

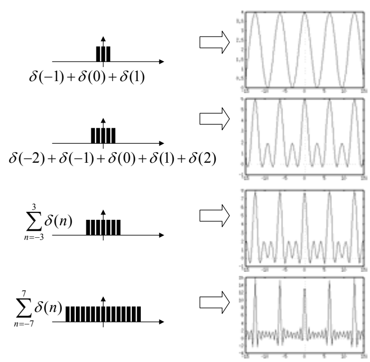
$\mathrm{Im}(F(\omega))$



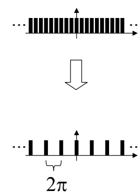
Allgemein kann man zeigen:

ist $f(t)$ gerade, dann ist $F(\omega)$ reell,
ist $f(t)$ ungerade, dann ist $F(\omega)$ imaginär
(übrigens auch umgekehrt)

Fouriertransformierte: Impulszug

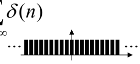


Schließlich:

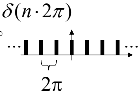


Fouriertransformierte eines Impulszuges

$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(n)$

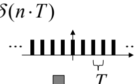


$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(n\cdot 2\pi)$

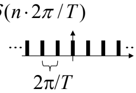


f $\Downarrow$ F

$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(n\cdot T)$



$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(n\cdot 2\pi/T)$



Von kontinuierlich nach diskret

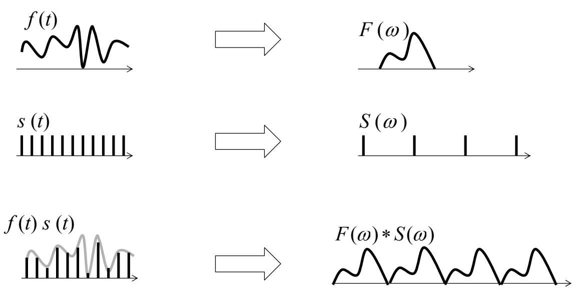
bekannt: $F(f(t)*g(t))=F(f(t))\cdot F(g(t))$

Zeitdomäne Faltung	$\equiv$	Frequenzdomäne Multiplikation
Zeitdomäne Multiplikation	$\equiv$	Frequenzdomäne Faltung

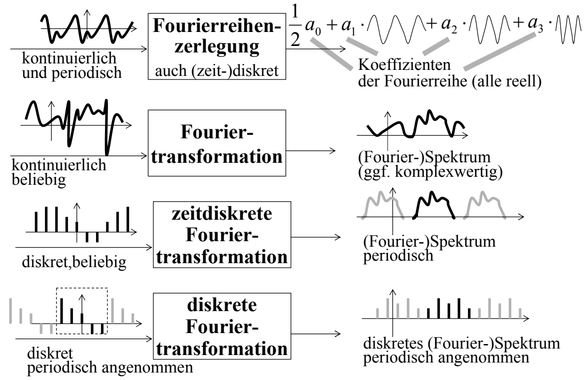
Abtasten (sampling) von $f(t)$ mit der Abtastperiode T bedeutet:

Multiplikation von $f(t)$ mit der unendlichen Impulsfolge $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(n\cdot T)$

Von kontinuierlich nach diskret



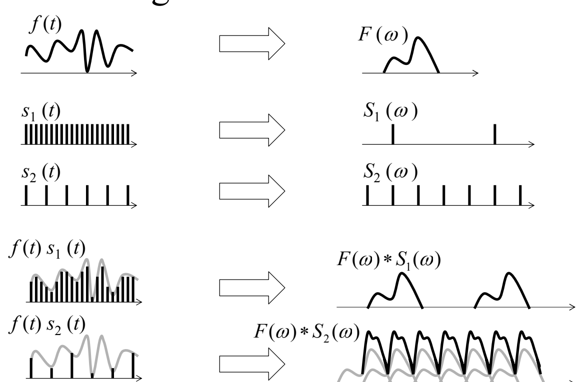
Varianten der Fouriertransformation



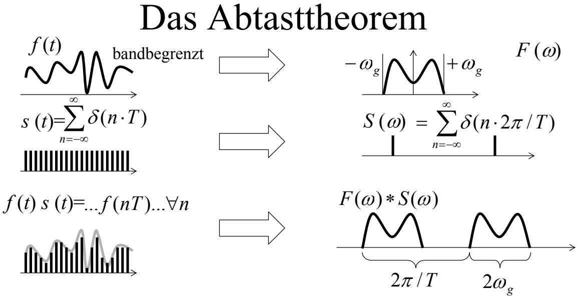
Übersicht Eigenschaften

diskret	⟺	periodisch
reell	⟺	gerade
imaginär	⟺	ungerade
bandbegrenzt	⟺	endlicher Definitionsbereich

Aliasing und das Abtasttheorem



Das Abtasttheorem



Damit sich die gefalteten Einzelspektren nicht überlagern muß gelten:

$2\pi / T > 2\omega_g \Rightarrow T > 2\omega_g / (2\pi)$

wenn ω_s die Abtastfrequenz ist, dann ist $\omega_s = 2\pi/T$ => $\omega_s > 2\omega_g$